京都大学数理解析研究所講究録 (研究集会「情報数理に関連する応用函数解析の研究」, 1999 年 1 月) の原稿

高次元連制約の零容量領域[1]

伊藤尚史[2], 加藤晶子[3], Zsigmond Nagy, Kenneth Zeger[4]

1. はじめに

n 次元 Euclid 空間の整数格子点からなる, 座標系に沿う n 次元直方体の各点に, 0 か 1 を一つずつ配置することを考える. ただし, 0 と 1 の配置は, 次に定義する (d,k) 連制約を満たすものとする.

定義 1. n 次元直方体上の 0 と 1 の配置が (d,k) **連制約**を満たすとは, 座標系に沿う任意の直線とその直方体との空でない共通部分上で, 0 が k 個より多く連なって配置されておらずかつどの相異なる二つの 1 と 1 の間にも 0 が少なくとも d 個は配置されているときにいう.

定義より, $0 \leq d \leq k < \infty$ の場合, または $0 \leq d < k = \infty$ の場合にのみ (d,k) 連制約という概念は意味を持つ. さて, (d,k) 連制約を満たす 0 と 1 の配置の個数がいったいどの程度なのかが知りたい. そこで, その尺度として次の量を考え, n 次元 (d,k) 容量と呼ぼう.

定義 2. 辺 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ の直方体上で, (d,k) 連制約を満たす 0 と 1 の配置の個数を N とする.

$$\lim_{m_1, m_2, \ldots, m_n \to \infty} \frac{\log_2 N}{m_1 m_2 \cdots m_n}$$

を $C_{d,k}^{(n)}$ と書き, n **次元** (d,k) **容量**と呼ぶ. ただし, 直方体が辺 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ であるとは, 各辺上の整数格子点の個数が $m_1, m_2, \ldots, m_n$ であるときにいう.

この極限はつねに収束することが知られている (証明は本質的に [3] にある). 特に, $m_1 = m_2 = \cdots = m_n\ (= m)$ の場合を考えると, 一辺 m の n 次元立方体に関し $C_{d,k}^{(n)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\log_2 N}{m^n}$ も成り立つ.

後で必要となるので, 比較的平易な事実と既知の事実をここで列挙しておこう.

命題 1. n 次元 (d,k) 容量 $C_{d,k}^{(n)}$ に関し, 次の (1)–(5) が成り立つ.

(1) $k' > k \quad \Rightarrow \quad C_{d,k'}^{(n)} \geq C_{d,k}^{(n)}$,

(2) $n' > n \quad \Rightarrow \quad C_{d,k}^{(n)} \geq C_{d,k}^{(n')}$,

(3) $C_{d,2d+1}^{(n)} \geq \dfrac{1}{2d+2}$,

(4) $d < k$ のとき, $C_{d,k}^{(1)} > 0$,

(5) $d < k$ のとき, $d \neq 0$ かつ $k = d+1 \;\Leftrightarrow\; C_{d,k}^{(2)} = 0$.

[1] 著者順は英語のアルファベット順. 内容に関しては本稿と同等の論文を [2] として投稿した. 本研究は学術振興会と米国 NSF の補助を受けた.

[2] Hisashi Ito, 東邦大学理学部情報科学科, 274-8510 船橋市三山 2–2–1, mailto: his@kuro.is.sci.toho-u.ac.jp.

[3] Akiko Kato, 東京大学工学部計数工学科, 113-8656 文京区本郷 7–3–1, mailto: akiko@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp.

[4] ジグモンド=ノッジ (南史孟), ケン=ジーガー (内田健), Department of Electrical and Computer Engineering, University of California, San Diego, CA 92103-0407, USA, mailto: (nagy | zeger)@code.ucsd.edu.

証明. (1) (d,k') 連制約よりも (d,k) 連制約の方が厳しく, 可能な配置の個数は減少するからいえる.
(2) (d,k) 連制約を満たす n' 次元の 0 と 1 の配置を, 座標系に沿う任意の n 次元超平面で切断すると, その面には同じ制約を満たす n 次元の 0 と 1 の配置が現れる. このことから, 辺 $m_1,\ldots,m_n,\ldots,m_{n'}$ の直方体上の制約を満たす配置の個数を N', 辺 $m_1,\ldots,m_n$ の直方体上の制約を満たす配置の個数を N とすると, $N' \leq N^{m_{n+1}m_{n+2}\cdots m_{n'}}$ であり, 証明すべき不等式が出る.
(3) 集合 $S=\{1,\ldots,(2d+2)t\}$ とし, n 次元立方体 S^n とする. 点 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^n$ が, $(2d+2) \mid \sum_{i=1}^n x_i$ のときにはその点に 1 を配置し, $(d+1) \nmid \sum_{i=1}^n x_i$ のときには 0 を配置する. どちらの条件にも当てはまらない点にはどう 0 や 1 を配置しても, $(d,2d+1)$ 連制約を満たす. したがって

$$C_{d,2d+1}^{(n)} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 2^{(2d+2)^n t^n/(2d+2)}}{(2d+2)^n t^n} = \frac{1}{2d+2}.$$

(4) 1 次元の場合, $k<\infty$ のとき (d,k) 連制約と対応する有限な強連結グラフが作れる. $d<k$ より, このグラフには出次数 2 以上の節点が存在するので, 隣接行列の Frobenius 固有値 λ は 1 より大である. そして $C_{d,k}^{(n)}=\log_2\lambda$ となる (例えば [4] を見よ). さらに $k=\infty$ の場合は, これと (1) からしたがう.
(5) [3] を見よ. □

次元 n に関する容量の単調減少性を表す上の不等式 (2) から, 極限 $\lim_{n\to\infty} C_{d,k}^{(n)}$ の収束がわかる.
容量 $C_{d,k}^{(n)}$ の定義自体は単純で自然である. 実際, 上述のように 1 次元 (d,k) 容量はグラフの特性量という一見無関係な量を用いて書き下すことができる. これは (d,k) 容量という概念の妥当性を示唆する. しかし, 2 次元以上の容量を 1 次元の場合のように '顕な形' に一般的に求めるのは困難であり未解決な問題である (2, 3 次元の $(0,1)$ 容量の近似値ならば, [1] と [5] にそれぞれ計算例がある). 本論文では, 高次元の容量が '顕な形' に求まる基本的な例として, 容量が零 (という一種の '顕な形') になる場合を考察する. そしてそのための d と k の必要充分条件を与える. この際, $C_{d,d}^{(n)}=0$ は自明なので, 本論文のこれ以降では $d<k$ の場合だけに興味を集中し, $d=k$ の場合に関しては言及しない.
さて, 次の二つの定理が, 容量が零となるための d と k の必要充分条件である.

定理 1. $n>1$ かつ $d<k$ のとき, $d\neq 0$ かつ $k=d+1 \Leftrightarrow C_{d,k}^{(n)}=0$.

定理 2. $d<k$ のとき, $k\leq 2d \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} C_{d,k}^{(n)}=0$.

(d,k) 連制約やその容量に関して歴史的には, 1 次元の場合についてだけ, 主として磁気記憶装置への応用といった工学的動機から多くの研究がなされてきた. そして近年, ようやく 2 次元や 3 次元の場合の研究が始まった. ごく最近, Kato と Zeger[3] によって 2 次元の場合に関し命題 1(5) の結果が得られた. 本論文の上記二つの定理は, この結果を高次元へ一般化したものになっており, 特に定理 1 は, 2 以上の有限次元で, 結局, 次元に依らず 2 次元の場合と同条件が必要充分になってしまうことを示している.

2. 定理 1 の証明

本章では定理 1 の証明を行なう. 定理 1 の $\Rightarrow$ は 2 次元の結果 (命題 1(5))

$$d\neq 0 \text{ かつ } k=d+1 \Rightarrow C_{d,k}^{(2)}=0$$

と次元に関する単調減少性 (命題 1(2)) により直ちにいえる. $\Leftarrow$ のために対偶

$$d=0 \text{ または } k\geq d+2 \Rightarrow C_{d,k}^{(n)}>0$$

をとる．$d=0$ の場合は，命題 1(1) と (3) により $C^{(n)}_{0,k'} \geq C^{(n)}_{0,1} \geq \frac{1}{2}$ $(k'>1)$ が得られるのでいえる．残るは $d>0$ かつ $k \geq d+2$ の場合だが，命題 1(1) により $C^{(n)}_{d,k'} \geq C^{(n)}_{d,d+2}$ $(k'>d+2)$ が得られ，そして特に $d=1$ の場合には命題 1(3) により $C^{(n)}_{1,3} \geq \frac{1}{4}$ も得られる．結局，$d>1$ でつねに $C^{(n)}_{d,d+2}>0$ をいえば証明は完成する．2.2 節でこのことを証明する．次の節はそのための数学的準備である．

2.1. 準備

集合 $S=\{0,1,\ldots,d+1\}$ とする．一辺 $d+2$ の n 次元立方体 S^n 上の 0 と 1 の配置 $f:S^n \to \{0,1\} \subseteq \boldsymbol{Z}$ が n **次元置換配置**であるとは，座標系に沿い S^n と交わる任意の直線 l への f の制限 $f|_l$ が一点で値 1 を取りそれ以外で値 0 を取るときにいう．S^n 上の任意の一つの置換配置を，どの座標軸方向にいくつ，側面が隣接するように平行移動して並べても $(d+1,d+1)$ 連制約を満たすことは直ちにわかる．ここでさらに，もし立方体 S^n に含まれる一辺 2 の n 次元部分立方体 $U=(a_1,a_2,\ldots,a_n)+\{0,1\}^n$ があって，U 上の 0 と 1 の配置 $f|_U$ が部分置換配置，つまり，座標系に沿い U と交わる任意の直線 l への f の制限 $f|_{l\cap U}$ が一点で値 1 を取りそれ以外で値 0 を取るとする．一辺 2 に注意すると，制限 $f|_{l\cap U}$ の値は 0 と 1 をそれぞれちょうど一回ずつとるはずである．そこで，U 上で配置が 0 の点には 1 と，配置が 1 の点には 0 と再配置してみよう．このような再配置は，U に台 $\operatorname{supp}\chi$ を持つ**部分反転** $\chi:S^n \to \{-1,0,1\} \subseteq \boldsymbol{Z}$ を

$$\chi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(-1)^{x_i-a_i} & 0 \leq x_i-a_i \leq 1\ (i=1,2,\ldots,n)\ \text{のとき,}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

で定義し，$f-\chi$ (あるいは $f+\chi$) を作るという操作で表現できる．すると，再配置で立方体 S^n 上の別の置換配置が得られる．元の置換配置と再配置後の置換配置を比べると，ある一つの直線上の 1 の位置は高々一つしかずれないので，それらの配置をどの座標軸方向にどの順で，側面が隣接するように平行移動して並べても $(d,d+2)$ 連制約を満たす．このことを利用して容量 $C^{(n)}_{d,d+2}>0$ を証明することになる．ところで，はじめにも述べたように，容量の正確な値を求めることは困難な面白い問題である．そこで本論文では，容量 $C^{(n)}_{d,d+2}$ が正と証明するに停まらず，この機会に乗じて，容量がそれ以上だと保証できるなるべく大きな下限も提示する (定理 3, 4)．次の補題は，容量の下限のために基本的である．

補題 1. 集合 $S=\{0,1,\ldots,d+1\}$ とし，置換配置 $f:S^n \to \{0,1\}$ とする．互いに交わらない台を持つ部分反転の族 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の元 χ_λ に対し $f-\chi_\lambda$ が置換配置とすると $C^{(n)}_{d,d+2} \geq \frac{|\Lambda|}{(d+2)^n}$ である．

証明. $M \subseteq \Lambda$ とする．座標系に沿う直線 l が，共通部分が空の二つの台 $\operatorname{supp}\chi_\lambda$, $\operatorname{supp}\chi_\mu$ $(\lambda,\mu \in M)$ の両方と交わるとすると，f は l 上で値 1 を 2 回とらねばならず，置換配置ではありえない．よって，ある $\lambda \in M$ が存在して $l \cap \operatorname{supp}\chi_\lambda \neq \phi$ ならば，$(f-\sum_{\mu\in M}\chi_\mu)|_l=(f-\chi_\lambda)|_l$ である．つまり，$f-\sum_{\mu\in M}\chi_\mu$ は置換配置である．任意の一本の直線 l に着目すると，$f-\sum_{\mu\in M}\chi_\mu$ と $f-\sum_{\mu\in M'}\chi_\mu$ $(M,M' \subseteq \Lambda)$ のそれぞれにおける 1 の位置は高々一つしか違わない．ゆえに，どの $f-\sum_{\mu\in M}\chi_\mu$ $(M \subseteq \Lambda)$ をどの座標軸方向にどの順で，側面が隣接するように平行移動して並べても $(d,d+2)$ 制約を満たす．これら $2^{|\Lambda|}$ 通りの置換配置から任意に選んで一辺 $(d+2)t$ の立方体になるように並べ，極限を考えると，

$$C^{(n)}_{d,d+2} \geq \lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 2^{|\Lambda|t^n}}{(d+2)^n t^n}=\frac{|\Lambda|}{(d+2)^n}. \qquad \square$$

集合 $S=\{0,1,\ldots,d+1\}$ とする．n 次元立方体 S^n 上の n **次元ラテン方陣**とは，写像 $f:S^n \to S$ であって，座標系に沿い S^n と交わる任意の直線 l への f の制限 $f|_l$ がつねに全単射のときにいう．次の命題によって，S^{n-1} 上のラテン方陣の集合と S^n 上の置換配置の集合とは同一視できる．

命題 2. 集合 $S=\{0,1,\dots,d+1\}$ とする．S^n上の置換配置 f に対し，z の方程式 $f(x_1,\dots,x_{n-1},z)=1$ の唯一の解 $z=x_n$ で $\varphi(f)$ を $\big(\varphi(f)\big)(x_1,\dots,x_{n-1})=x_n$ と定義する．このとき，$\varphi(f)$ は S^{n-1}上のラテン方陣であり，対応 φ は全単射．そして S^n上の置換配置 f_1, f_2 に対し，次の (1), (2) は同値.

(1) f_1-f_2 は台が $(a_1,a_2,\dots,a_n)+\{0,1\}^n$ なる部分反転,

(2) $\varphi(f_2)-\varphi(f_1)$ は台が $(a_1,\dots,a_{n-1})+\{0,1\}^{n-1}$ なる部分反転で $a_n=\big(\varphi(f_1)\big)(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$.

証明. $j=1,2,\dots,n-1$ と $c_1,c_2,\dots,c_{n-1}\in S$ を任意に固定し，x と y の関係式

$$f(c_1,\dots,c_{j-1},x,c_{j+1},\dots,c_{n-1},y)=1$$

を考える．f が置換配置なので，この関係式は全単射 $x\mapsto y$ を定める．つまり $\varphi(f)$ はラテン方陣である．逆に，g をラテン方陣とするとき，$\psi(g)$ を

$$\big(\psi(g)\big)(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)=\delta_{g(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),x_n}$$

で定める．ただし，δ は Kronecker のデルタである．すると $\psi(g)$ は置換配置となる．ψ は φ の逆写像になっており，つまり，φ は全単射である．

後半 (1)⇒(2) を示す．$(x_1,\dots,x_{n-1})\in(a_1,\dots,a_{n-1})+\{0,1\}^{n-1}$ のとき，$(f_1-f_2)(x_1,\dots,x_{n-1},a_n)=\prod_{i=1}^{n-1}(-1)^{x_i-a_i}$ と $f_1(x_1,\dots,x_{n-1},a_n+1)=f_2(x_1,\dots,x_{n-1},a_n)$ が成り立つ．これより，$f_1(x_1,\dots,x_{n-1},a_n)=f_1(x_1,\dots,x_{n-1},a_n+1)+\prod_{i=1}^{n-1}(-1)^{x_i-a_i}$ となるので，

$$\big(\varphi(f_1)\big)(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=a_n+\frac{1-\prod_{i=1}^{n-1}(-1)^{x_i-a_i}}{2}$$

を得る．f_2 に関しても同様に，

$$\big(\varphi(f_2)\big)(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=a_n+\frac{1+\prod_{i=1}^{n-1}(-1)^{x_i-a_i}}{2}$$

を得る．以上は，$\varphi(f_2)-\varphi(f_1)$ が台 $(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})+\{0,1\}^{n-1}$ を持つ部分反転であることを表しており，$a_n=\big(\varphi(f_1)\big)(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ でもある．(2)⇒(1) も上の議論を逆に辿り示せる． □

命題 2 を用いると，補題 1 をラテン方陣の言葉で述べ直すことができる．

補題 1′. 集合 $S=\{0,1,\dots,d+1\}$ とし，ラテン方陣 $g:S^{n-1}\to S$ とする．互いに交わらない台を持つ部分反転の族 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の元 χ_λ に対し $g+\chi_\lambda$ がラテン方陣とすると $C^{(n)}_{d,d+2}\geq\frac{|\Lambda|}{(d+2)^n}$ である．

証明. 二つの $n-1$ 次元ラテン方陣 g, $g+\chi_\lambda$ は，命題 2 の全単射 φ^{-1} によって n 次元置換配置 $\varphi^{-1}(g)$, $\varphi^{-1}(g+\chi_\lambda)$ にそれぞれ写る．このとき $\varphi^{-1}(g)-\varphi^{-1}(g+\chi_\lambda)$ は n 次元部分反転である．命題 2 の後半を用いれば，元の $n-1$ 次元部分反転 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の台が互いに交わらないことより，写った先の n 次元部分反転の台が互いに交わらないことがいえる． □

2.2. 証明

d の偶奇に応じて定理 3 と 4 がそれぞれ成立し，定理 1 の証明が完成する．

定理 3. $n>1$ とし，$d>1$ を偶数とするとき，$C^{(n)}_{d,d+2}\geq\dfrac{1}{2^{n-1}(d+2)}$ である．

証明. 集合 $S=\{0,1,\ldots,d+1\}$ とする. 任意の $x_1,x_2\in S$ に対し, $0\le x_1-a_1\le 1$ と $0\le x_2-a_2\le 1$ を満たす偶数 a_1,a_2 を取り,

$$e(x_1,x_2)=\big(a_1+a_2+\frac{1-(-1)^{x_1-a_1}(-1)^{x_2-a_2}}{2}\big)\bmod (d+2)$$

と定義する (ただし, $a \bmod b$ は a を b で割った余りを表す). 第 1 座標軸に平行な制限 $x\mapsto e(x,x_2)$ は, x_2 が偶数のときは $e(x,x_2)=(x+x_2)\bmod (d+2)$ となり, 全単射である. x_2 が奇数のときは, 任意の偶数 $a_1,a_2\in S$ に対し $e(a_1+1,a_2+1)=e(a_1,a_2)$ と $e(a_1,a_2+1)=e(a_1+1,a_2)$ が成り立つことに注意すれば, やはり全単射である. 第 2 座標軸に関しても同様であり, つまり e は 2 次元ラテン方陣である. 写像 $g_1:S\to S$ を S 上の恒等写像 id_S とし, 漸化式 $g_{n+1}=e\circ(g_n\times\mathrm{id}_S)$ で写像 $g_n:S^n\to S$ の列を定める. 座標系に沿う直線への制限が全単射という性質は, この性質を持つ写像との合成で保存され, しかも e がこの性質を持つので, g_n もラテン方陣である.

さて, 任意の偶数 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in S$ で

$$g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\big(\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{1-\prod_{i=1}^{n}(-1)^{x_i-a_i}}{2}\big)\bmod (d+2)\quad (0\le x_i-a_i\le 1,\ i=1,2,\ldots,n)$$

が成り立つことを, n に関する数学的帰納法で示す. $n=1$ のとき, $g_1=\mathrm{id}_S$ なので自明. $n=m-1\ge 1$ での成立を仮定する. $a_1,a_2,\ldots,a_m\in S$ を偶数とする. $\sum_{i=1}^{m-1}a_i$ と a_m は偶数であり, $0\le x_i-a_i\le 1$ $(i=1,2,\ldots,m)$ のとき $\dfrac{1-\prod_{i=1}^{m-1}(-1)^{x_i-a_i}}{2}$ ($=t$ と置く) と x_m-a_m は 0 か 1 であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
g_m(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m)&=e\Big(\big(\sum_{i=1}^{m-1}a_i+t\big)\bmod (d+2),a_m+(x_m-a_m)\Big)\\
&=\big(\sum_{i=1}^{m-1}a_i+a_m+\frac{1-(-1)^{t}(-1)^{x_m-a_m}}{2}\big)\bmod (d+2)\\
&=\big(\sum_{i=1}^{m}a_i+\frac{1-\prod_{i=1}^{m}(-1)^{x_i-a_i}}{2}\big)\bmod (d+2)
\end{aligned}$$

が得られ, $n=m$ での成立がいえた.

以上より, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in S$ を偶数とし, 台を $(a_1,a_2,\ldots,a_n)+\{0,1\}^n$ に持つ部分反転を χ とすると,

$$\begin{aligned}
&(g_n+\chi)(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
=&\begin{cases} g_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)+\dfrac{1+\prod_{i=1}^{n}(-1)^{x_i-a_i}}{2} & 0\le x_i-a_i\le 1\ (i=1,2,\ldots,n)\ \text{のとき},\\ g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \text{それ以外のとき}\end{cases}
\end{aligned}$$

である. すると, g_n がラテン方陣なので $g_n+\chi$ もラテン方陣である. このような部分反転 χ の台は互いに交わらず, 全部で $\left(\frac{d+2}{2}\right)^n$ 通りある. したがって, 補題 1′より,

$$C^{(n+1)}_{d,d+2}\ge\frac{1}{2^n(d+2)}.$$

□

定理 4. $n>1$ とし, $d>1$ を奇数とするとき, $C^{(n)}_{d,d+2}\ge\dfrac{1}{(d+2)^n}\dbinom{n-1+\frac{d-3}{2}}{\frac{d-3}{2}}$ である.

証明. 添数を集合 $S=\{0,1,\dots,d+1\}$ に持つ $d+2$ 次正方行列 $M^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\dots,\frac{d-1}{2})$ を, α が偶数のとき

$$
M^{(\alpha)}=
\begin{array}{c|c|ccccccccc|}
 & 0 & 2\alpha & & & & & & d-1 & & d+1 \\
0 & \mathbf{O} & & & & & \mathbf{O} & & & & \\
\cline{2-11}
2\alpha & & & & & & & & 2\alpha+1 & 0 & 2\alpha+2 \\
 & & & \mathbf{O} & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & 2\alpha+2 & 2\alpha+1 \\
 & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 2\alpha+2 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & \mathbf{O} & & & 2\alpha+1 & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\
 & & & 0 & 0 & 2\alpha+2 & 0 & 2\alpha+1 & & & \\
d-1 & & 2\alpha+1 & 0 & 2\alpha+2 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 2\alpha+2 & 0 & 2\alpha+1 & & & & \mathbf{O} & \\
d+1 & & 2\alpha+2 & 2\alpha+1 & 0 & & & & & & \\
\end{array},
$$

α が奇数のとき

$$
M^{(\alpha)}=
\begin{array}{c|c|cccccccc|}
 & 0 & 2\alpha & & & & & & d & d+1 \\
0 & \mathbf{O} & & & & \mathbf{O} & & & & \\
\cline{2-10}
2\alpha & & & & & & & & 2\alpha+2 & 2\alpha+1 \\
 & & & & & & & 2\alpha+1 & 0 & 2\alpha+2 \\
 & & & \mathbf{O} & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & 2\alpha+1 & \\
 & \mathbf{O} & & & & 2\alpha+2 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\
 & & & & 2\alpha+1 & 0 & 2\alpha+2 & & & \\
 & & & 2\alpha+2 & 0 & 2\alpha+1 & & & & \\
d & & 2\alpha+1 & 0 & 2\alpha+2 & & & & \mathbf{O} & \\
d+1 & & 2\alpha+2 & 2\alpha+1 & & & & & & \\
\end{array}
$$

で定義する. このとき, $M^{(\alpha)}=(m_{ij}^{(\alpha)})$ $(i,j\in S)$ は次の 3 つの性質を持つ.

(1)　$M^{(\alpha)}$ において, $2\alpha+1$ と $2\alpha+2$ のそれぞれをいずれかの成分に持つような行の添数の集合は,

$$\{i\mid m_{ij}^{(\alpha)}=2\alpha+1,j\in S\}=\{i\mid m_{ij}^{(\alpha)}=2\alpha+2,j\in S\}=\{2\alpha,2\alpha+1,\dots,d+1\}$$

である (列に関しても同じである),

(2)　$m_{ij}^{(\alpha)}\neq 0$ かつ $m_{ij}^{(\beta)}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\beta$,

(3)　全ての $\alpha=0,1,\dots,\frac{d-1}{2}$ に対しつねに $m_{ij}^{(\alpha)}=0\Rightarrow\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{j}{2}\right]\leq\frac{d-3}{2}$ または $i+j=d$ または $(i,j)=(d+1,d+1)$　(ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す).

　上で定義した $M^{(\alpha)}$ を用い, 写像 $e:S^2\to S$ を, 次の (イ)–(ハ) の場合に分けて定める. 性質 (2), (3) より, (イ)–(ハ) は過不足のない場合分けになっていることに注意しよう.

(イ) $\left[\frac{x_1}{2}\right]+\left[\frac{x_2}{2}\right] \leq \frac{d-3}{2}$ のとき, $0 \leq x_1-a_1 \leq 1$ と $0 \leq x_2-a_2 \leq 1$ を満たす偶数 a_1, a_2 を取り,

$$e(x_1, x_2)=a_1+a_2+\frac{1-(-1)^{x_1-a_1}(-1)^{x_2-a_2}}{2},$$

(ロ) $x_1+x_2=d$ または $(x_1, x_2)=(d+1, d+1)$ のとき, $e(x_1, x_2)=d+1$,
(ハ) $m_{x_1 x_2}^{(\alpha)} \neq 0$ となる $\alpha=\alpha_0$ が存在するとき, $e(x_1, x_2)=(m_{x_1 x_2}^{(\alpha_0)}-3) \bmod (d+1)$.

すると (イ) より, $y=0,1, \ldots, d-2$ を固定するとき, $e(x_1, x_2)=y$ となる x_2 が存在するような x_1 の集合は

$$\{x_1 \mid e(x_1, x_2)=y, x_2 \in S\} \supseteq \{0,1, \ldots, 2\left[\frac{y}{2}\right]+1\}$$

を満たす. また, $M^{(\alpha)}$ の性質 (1) と (ハ) より, $y=0,1, \ldots, d-2$ を固定するとき, $e(x_1, x_2)=y$ となる x_2 が存在するような x_1 の集合は

$$\{x_1 \mid e(x_1, x_2)=y, x_2 \in S\} \supseteq \{2\left[\frac{y}{2}\right]+2, \ldots, d, d+1\}$$

を満たす. また (ハ) と (ロ) より, $y=d-1, d, d+1$ を固定するとき, $e(x_1, x_2)=y$ となる x_2 が存在するような x_1 の集合は S と一致する. ゆえに, 任意の $x_1, y \in S$ に対し, $e(x_1, x_2)=y$ となる x_2 が存在する. 任意の $x_2, y \in S$ に関しても $e(x_1, x_2)=y$ となる x_1 が同様に存在し, つまり e は 2 次元ラテン方陣である.

定理 3 の証明と同様に, $g_1=\mathrm{id}_S$ とし漸化式 $g_{n+1}=e \circ(g_n \times \mathrm{id}_S)$ でラテン方陣 $g_n: S^n \rightarrow S$ の列を定める. 任意の偶数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(\sum_{i=1}^n a_i \leq d-3)$ で

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^n a_i+\frac{1-\prod_{i=1}^n(-1)^{x_i-a_i}}{2} \quad (0 \leq x_i-a_i \leq 1,\ i=1,2, \ldots, n)$$

が成り立つことが, 定理 3 の証明と同様の数学的帰納法で示せる. このことから, 台を $(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\{0,1\}^n$ に持つ部分反転を χ とすると, $g_n+\chi$ はラテン方陣である. このような部分反転 χ の台は互いに交わらず, 全部で ${}_{n+1}H_{\frac{d-3}{2}}$ 通りある. ただし H は重複組合せを表す. したがって, 補題 1′より,

$$C_{d, d+2}^{(n+1)} \geq \frac{{}_{n+1}H_{\frac{d-3}{2}}}{(d+2)^{n+1}}=\frac{1}{(d+2)^{n+1}}\binom{n+\frac{d-3}{2}}{\frac{d-3}{2}}. \qquad \square$$

3. 定理 2 の証明

本章では定理 2 の証明を行なう. 定理 2 の $\Leftarrow$ の対偶

$$k \geq 2d+1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_{d, k}^{(n)}>0$$

は, 命題 1(1) と (3) より $C_{d, k'}^{(n)} \geq C_{d, 2d+1}^{(n)} \geq \frac{1}{2d+2}$ $(k'>2d+1)$ なので, 各辺で $n \rightarrow \infty$ とすると出る. 定理 2 の $\Rightarrow$ は下で示す定理 5 を使えば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{d, k}^{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{k-d}{k-d+1}\right)^{n-1} C_{d, k}^{(1)}=0$$

と示せ, 定理 2 の証明が完成する.

定理 5. $d<k \leq 2d$ のとき, $C_{d, k}^{(n+1)} \leq \dfrac{k-d}{k-d+1} C_{d, k}^{(n)}$ である.

証明. 正整数 s, t とし, 集合 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ とする. $n+1$ 次元直方体 T, U_0, U_j $(j = 1, 2, \dots, t)$ を

$$T = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1, \dots, x_n \in S,\ -d \le x_{n+1} < (k-d+1)t\},$$
$$U_0 = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1, \dots, x_n \in S,\ -d \le x_{n+1} < 0\},$$
$$U_j = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1, \dots, x_n \in S,\ (k-d+1)(j-1) < x_{n+1} < (k-d+1)j\}$$

で定め, $U = \bigcup_{j=0}^{t} U_j$ とする. (d,k) 連制約を満たす, T 上と U_j 上の配置の個数をそれぞれ N_T, N_{U_j} $(j = 0, 1, \dots, t)$ とする. ここで $N_T \le \prod_{j=0}^{t} N_{U_j}$ を示そう. $U \subseteq T$ なので, (d,k) 連制約を満たす, T 上の配置 f を一つ定めると U 上の配置 $f|_U$ が一つ定まる. $f|_U$ は (d,k) 連制約を各 U_j 上で満たしている. したがって不等式のためには, この対応 $r : f \mapsto f|_U$ が単射であることを示せば充分である.

そこで, (d,k) 連制約を満たす, T 上の二つの配置 f_0, f_1 に対し $f_0 \ne f_1$ かつ $f_0|_U = f_1|_U$ を仮定し矛盾を導く. 仮定より, $c_1, \dots, c_n \in S$ と j $(= 0, 1, \dots, t)$ が存在して $f_0(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)j) \ne f_1(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)j)$ である. $c_1, \dots, c_n$ を一つ固定するとき, このような最小の j を J と置く. 一般性を失わず, $f_0(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)J) = 0$ と $f_1(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)J) = 1$ を仮定して良い. $f_0|_U = f_1|_U$ と J の最小性から,

$$f_0(c_1, \dots, c_n, x) = f_1(c_1, \dots, c_n, x) \quad \bigl(-d \le x < (k-d+1)(J+1) \text{ かつ } x \ne (k-d+1)J\bigr)$$

を得る. ところで $k \le 2d$ より $(k-d+1)(J+1) - 1 \le (k-d+1)J + d$ である. $f_1(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)J) = 1$ より, f_1 の相異なる二つの 1 と 1 の間には少なくとも d 個の 0 があるので,

$$f_0(c_1, \dots, c_n, x) = f_1(c_1, \dots, c_n, x) = 0 \quad \bigl((k-d+1)J-d \le x < (k-d+1)(J+1) \text{ かつ } x \ne (k-d+1)J\bigr)$$

を得る. 一方, $f_0(c_1, \dots, c_n, (k-d+1)J) = 0$ より,

$$f_0(c_1, \dots, c_n, x) = 0 \quad \bigl((k-d+1)J - d \le x < (k-d+1)(J+1)\bigr)$$

でなければならず, 連続する $k+1$ 個の 0 が配置 f_0 に存在してしまい矛盾. よって r は単射である.

以上より, (d,k) 連制約を満たす, S^n 上の 0 と 1 の配置の個数を M として,

$$\begin{aligned} C_{d,k}^{(n+1)} &= \lim_{s,t\to\infty} \frac{\log_2 N_T}{\bigl((k-d+1)t+d\bigr)s^n} \le \lim_{s,t\to\infty} \frac{\log_2 \prod_{j=0}^{t} N_{U_j}}{\bigl((k-d+1)t+d\bigr)s^n} \\ &\le \lim_{s,t\to\infty} \frac{\log_2 M^{(k-d)t+d}}{\bigl((k-d+1)t+d\bigr)s^n} = \frac{k-d}{k-d+1} C_{d,k}^{(n)}. \end{aligned}$$

□

謝辞. 本稿の完成直前に全体を精読し貴重な意見を下さった東邦大学理学部小林ゆう治教授に感謝します.

参考文献

[1] N. J. Calkin and H. S. Wilf, "The number of independent sets in a grid graph," *SIAM J. Discrete Math.*, **11** (1998), 54–60.

[2] H. Ito, A. Kato, Zs. Nagy, and K. Zeger, "Zero capacity region of multidimensional run length constraints," submitted to *Electronic Journal of Combinatorics*.

[3] A. Kato and K. Zeger, "On the capacity of two-dimensional run length constrained channels," *IEEE Trans. Information Theory*, **45** (1999), to appear.

[4] D. Lind and B. H. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press: New York, 1995.

[5] Zs. Nagy and K. Zeger, "Capacity bounds for the 3-dimensional $(0,1)$ runlength limited channel," submitted to *IEEE Trans. Information Theory*.